Konstruktion und Seinsstruktur: Praxis und Platonismus in der griechischen Mathematik

Burkert, Walter

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 34, 1982, S.125-141

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Konstruktion und Seinsstruktur: Praxis und Platonismus in der griechischen Mathematik *)

Von **Walter Burkert**, Zürich

(Eingegangen am 24. 9. 1982)

Carl Friedrich Gauß als einer der glänzendsten Begründer moderner Mathematik auf der einen Seite, die Altertumswissenschaft auf der anderen: dies sind heutzutage nicht nur verschiedene Fakultäten, sondern fast schon getrennte Kontinente. Der Graezist mag sich daran freuen, daß auch in moderner Mathematik noch viel Griechisch gesprochen wird – Arithmetik, Geometrie, Protogeometrie, Analysis, Metamathematik –, aber das Verhältnis der damit gemeinten Sachverhalte zu den alten Bedeutungen der griechischen Wörter ist doch alles andere als einfach; neben den Kontinuitäten gibt es Diskontinuitäten und grundlegende Neuansätze, bei denen Carl Friedrich Gauß durchaus eine Rolle spielt. Wenn also die Braunschweigische Wissenschaftliche Gesellschaft, indem sie die Altertumswissenschaft zu ehren unternahm, zu verstehen gibt, daß sie Isolation, unübersteigbare Gräben und Igelstellungen im Bereich der Wissenschaften nicht anerkennen will, mag der Altertumswissenschaftler dies seinerseits zum Anlaß nehmen, seine eigene Provinz aus der Distanz zu betrachten, wobei das Eigentümliche, das gerade nicht Selbstverständliche vielleicht deutlicher als im täglichen Umgang hervortritt. Dies gilt gerade auch von der antiken, der griechischen Mathematik.

Seit meiner Kindheit kannte ich die Anekdote, wie dem Volksschüler Carl Friedrich Gauß in Braunschweig die Aufgabe gestellt wurde, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren, und wie er, statt fleißig und lange zu rechnen, das Ergebnis auf die Tafel schrieb und sie dem Lehrer reichte: 5050[1]). Er hatte 1 und 100, 2 und 99 addiert und so die vereinfachte Lösung 50×101, im Nu gewonnen. Später lernte ich, daß die Pythagoreer schon 2300 Jahre früher ähnliche Verfahren kannten: sie stellten die Reihen $1+2+3$ ... als ‚Dreieckszahlen' dar, und dann ist leicht zu sehen, wie man die Summe gewinnt, wenn man ein solches Dreieck auf die Spitze stellt und neben ein gleiches rückt[2]).

Aber natürlich wäre dies ein schaler Triumph des Altertumswissenschaftlers: Schon die alten Griechen haben dies oder jenes gewußt, haben auch schon entdeckt,

---

*) Vortrag anläßlich der Verleihung der Carl-Friedrich-Gauß-Medaille in Braunschweig, 25. Juni 1982. Die Anmerkungen beschränken sich auf die notwendigsten Nachweise.

[1]) K. Reich, Carl Friedrich Gauß, Godesberg 1977, 7 f.

[2]) W. Burkert, Lore and Science in Ancient Pythagoreanism, Cambridge, Mass. 1972, 427 (im folgenden: L&S).

was ein aufgeweckter Volksschüler spontan und ohne Vorbildung finden konnte. Der unbestreitbare Rang der alten Griechen in der Geschichte der Mathematik, die darum ihren griechischen Namen behielt, stützt sich nicht auf einen solchen Rechentrick. Die ganze Arithmetik der Pythagoreer mit ihren ‚figurierten Zahlen', Dreieckszahlen, Rechteckszahlen ist sogar ausgesprochen untypisch für die griechische Mathematik, ein Nebenweg, der nicht weiter führte. Die eigentlich griechische Form der Mathematik ist die Geometrie, niedergelegt in jenem Werk des Eukleides um 300 v. Chr., das ‚Elemente', **Stoicheia** betitelt ist und das, wenn irgend ein Buch, ‚klassisch' heißen darf. Hier ist eine Form der Mathematik in ‚klassischer' Weise aufgebaut, so daß Jahrtausende kaum etwas zu ändern wußten. ‚Euklid' war bis in unser Jahrhundert Schulbuch; was Wissenschaft, beweisende Wissenschaft heißen darf, war in dieser ganzen Zeit von diesem Modell maßgebend bestimmt: *quod erat demonstrandum.* Für Spinoza mußte Philosophie als strenge Wissenschaft die Form des geometrischen Beweises annehmen: *more geometrico demonstrata.*

Gerade diese griechische Geometrie jedoch, obschon so lange als die ‚klassische', als Musterwissenschaft bewundert, ist alles andere als selbstverständlich. Sie ist vielmehr ausgesprochen atypisch und unmodern, und alle Entwicklungen der modernen Mathematik haben immer weiter von ihr hinweggeführt. Das begann mit der analytischen Geometrie von Descartes, die die geometrischen Figuren in Rechenoperationen umzusetzen gestattete, und endet jetzt auf praktischer Ebene mit dem Einsatz der Computer, die alle geometrisch-anschaulichen ‚Analogwerte' durch numerische, digitale Werte ersetzen; auch die Schallwellen werden ihre geometrische Kurvenform, die wir zu zeichnen pflegten, demnächst verlieren zugunsten der Digitalisierung der Nachrichtentechnik. Geometrie im Sinne Euklids wird zu einem fast musealen Sonderbereich der allgemeinen Mathematik. Nur die Schule bleibt wohl konservativ und lehrt bis auf weiteres Flächenverwandlungen.

Der eigentümliche und einmalige, griechische Charakter der Geometrie tritt aus der wachsenden Distanz immer deutlicher hervor. Wer dies konstatiert, braucht darum noch nicht Oswald Spenglers Konzeption der total getrennten ‚Kulturseelen' mit ihrer je besonderen Mathematik[3]) zu übernehmen. Mathematikhistoriker haben gezeigt, wie der Ausbau der Geometrie durch die Griechen gegenüber der Arithmetik durch ein spezifisches innermathematisches Problem vorangetrieben wurde, die Entdeckung der irrationalen Größen. Als ‚Zahlen', **arithmoí**, galten nur die ganzen ‚natürlichen' Zahlen. Nun erkannten die Griechen, daß schon ganz elementare geometrische Größen wie die Quadratdiagonale gegenüber der Quadratseite sich nicht in Zahlen bzw. Zahlverhältnissen ausdrücken lassen – in unserer Schreibweise geht es um $\sqrt{2}$ als unendlichen, nicht periodischen Dezimalbruch –: hier versagte die Arithmetik, während die Geometrie weiterführte. Dies gab offenbar den Anlaß, den ganzen Bereich der quadratischen Gleichungen – der in der vorgriechischen, babylonischen Mathematik schon recht weit gefördert war – nun in geometrische Aufgaben umzusetzen; dies sind die Aufgaben der ‚Flächenanlegung', **parabolé**, die die

[3]) O. Spengler, Der Untergang des Abendlandes, München 1923[33-47], 77–124.

Mathematikhistoriker ‚geometrische Algebra'[4]) nennen. Es sind dabei die Begriffe der Parabel, Ellipse und Hyperbel entstanden, die in anderer Weise wieder im cartesianischen Koordinatensystem den quadratischen Gleichungen entsprechen. Überflüssig wurde dieser elegante griechische Ausweg der ‚geometrischen Algebra', als die neuzeitliche Mathematik den Zahlbegriff erweiterte, den Begriff der ‚irrationalen Zahl' schuf – der für die Griechen *contradictio in adiecto* war –. Als der Zahlbereich dann noch durch die komplexen Zahlen, die ‚Gaußsche Zahlenebene', erweitert wurde, war das Verhältnis vollends umgekehrt: jetzt war die Arithmetik umfassender geworden als die Geometrie. Gerade Carl Friedrich Gauß hat das klar gesehen und ausgesprochen: „unsere allgemeine Arithmetik, von deren Umfang die Geometrie der Alten so weit überflügelt wird, ist ganz die Schöpfung der neueren Zeit"[5]).

Der Ruhm der griechischen, euklidischen Geometrie, das Klassische an ihr bleibt trotzdem anerkannt. Es beruht vor allem auf dem hier erstmalig und maßgebend durchgeführten axiomatisch-deduktiven Aufbau. Ausgehend von einer begrenzten Zahl von Definitionen und Sätzen – Postulaten und Axiomen – ist alles weitere rein, genau und streng zu beweisen: rein, d.h. ohne Einmengung unkontrollierter weiterer Daten aus Anschauung und Erfahrung – daß diese ‚Reinheit' in Euklids Darstellung nicht voll erreicht ist, gab Anlaß zu viel Diskussion und schließlich zum Fortschritt der Grundlagenforschung –; genau, so daß eine Näherung nie mit einer exakten Lösung zu verwechseln ist; streng, so daß keine Möglichkeit einer anderen Meinung offen bleibt. Der Beweis zwingt. Hierin liegt eine Eleganz, die ihren Eindruck auf gleichgestimmte Geister nicht verfehlt hat noch verfehlt. Eleganz und ‚Schönheit' aber eignet der Geometrie noch in besonderem, unmittelbarem Sinn. Stets geht hier das Denken Hand in Hand mit der Anschauung. Gerade und Kreis, Dreieck und Quadrat sind sinnenfällige, ‚schöne' Figuren; wie sehr sie den Griechen als ‚schön' erschienen, zeigt sich etwa daran, daß schon im 6. Jahrhundert, längst vor der Entwicklung strenger Geometrie, die Steinmetzen die Buchstaben der griechischen Schrift auf diese Elemente, Gerade, rechter Winkel, gleichseitiges Dreieck und Kreis, reduziert haben, im Kontrast zu willkürlich-freien älteren Formen, zum Krickelkrackel phönizischer, hebräischer, arabischer Schrift[6]). Erfassen der Form und genaues Zeichnen gehen in der Geometrie nebeneinander her, Einsicht in die Zusammenhänge ist wie ein gesteigertes ‚Sehen'. So heißen die Sätze der Mathematik, zunächst der Geometrie ‚Theoreme', Gegenstände der Schau, **theorémata**, wie Theorie überhaupt von Haus aus ‚festliche

[4]) H.G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, 44–53; O. Becker, Das Mathematische Denken der Antike, Göttingen 1966², 55–64; B.L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft, Basel 1966², 193–206; L&S 454.

[5]) O. Becker, Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg 1964², 215 (1831).

[6]) Zur ‚Geometrisierung' der griechischen Schrift A. Rehm, Handbuch der Archäologie I, München 1939, 216–218; R. Harder, Kleine Schriften, München 1960, 87 f.; 117–119; griechische Tradition führte dies auf Pythagoras zurück, Schol. Dion. Thr. Grammatici Graeci I 3, 183 f.

Schau' heißt. Für ‚Beweisen' steht in der Sprache Euklids einfach das Wort ‚zeigen', **deîxai**, lateinisch dann *demonstrare.*

Als ‚reine' und doch der Anschauung zugewandte Wissenschaft hat die griechische Mathematik eine besondere Affinität zur dominierenden Form der griechischen Philosophie entwickelt, zum Platonismus. Platons These, daß es ein übersinnliches, vom denkenden Geist erfaßtes Reich des reinen Seins gebe, ist mit der griechischen Mathematik aufs engste verflochten. Platon beruft sich für Grundfeststellungen seiner Erkenntnislehre ausdrücklich auf die Mathematik: er läßt an der bekannten Stelle des Dialogs ‚Menon' Sokrates einen ungebildeten Sklaven durch bloßes Fragen zu der Erkenntnis führen, wie man ein Quadrat verdoppeln kann, indem man die Diagonale als neue Seite nimmt, und schließt, daß der Sklave, der dies nicht äußerlich ‚gelernt' hat, „aus sich selbst heraus das Wissen genommen" hat (85d; 82b–86b); er konstatiert im ‚Phaidon', daß uns die Erfahrungswelt etwa das ‚Gleiche' nie in vollkommener Weise darbietet; vielmehr: „Bevor wir anfangen zu sehen und zu hören und die anderen Sinne zu gebrauchen, müssen wir ein Wissen haben von der Gleichheit an sich, was sie ist, wenn wir die in der Wahrnehmung gegebenen gleichen Dinge dazu in Beziehung setzen wollen" (75b). Die Mathematik mit ihrer Begrifflichkeit also verbürgt, daß es ‚apriorisches' Wissen gibt und damit Geist vor aller Empirie – so ist es ja auch noch bei Kant –. Zugleich aber bietet Platon mit seiner Geist-Ontologie der Mathematik ein Fundament an und einen besonderen Rang, und dies hat auf die Entwicklung der Mathematik und das Selbstverständnis der Mathematiker einen beherrschenden Einfluß ausgeübt. Die antike Mathematikgeschichte weiß von dem besonderen Aufblühen der mathematischen Studien gerade in der Schule Platons[7]); Zusammenhänge auch mit Euklid liegen auf der Hand[8]); prononcierter Platoniker war der vielseitige Mathematiker und Naturforscher Eratosthenes[9]); den eingehendsten Kommentar zum ersten Buch des Euklid und damit zu den Grundlagen der Mathematik schrieb der Neuplatoniker Proklos im 5. Jahrhundert n. Chr.[10]).

Die Verflechtung mit dem Platonismus charakterisiert in besonderem Maß die antike Mathematik und wirkt bis in die Neuzeit, obwohl sie dem eigentlich modernen Mathematikverständnis durchaus zuwiderläuft. Der ‚reine' platonisierende Charakter der griechischen Mathematik, vorzugsweise Geometrie, bedingt Erfolge ebenso wie Einschränkung, ja Versagen. Zunächst das Negative: der hohe Wert der ‚reinen' Theorie hat verhindert, daß in Gang kam, was heute den großen Erfolg der Wissenschaft ausmacht, die Verbindung von Naturwissenschaft und Technik. Bezeichnend ist hier der Fall des Archimedes, der 212 v. Chr. bei der Eroberung von Syrakus durch

---

[7]) Aristoteles Fr. 53; Eudemos Fr. 133 Wehrli; Academicorum Index p. 15–17 Mekler; L&S 422 f.

[8]) Vgl. Anm. 20; 24.

[9]) F. Solmsen, Eratosthenes as Platonist and Poet, Kleine Schriften I, Hildesheim 1968, 203–224; E. P. Wolfer, Eratosthenes von Kyrene als Mathematiker und Philosoph, Diss. Zürich 1954.

[10]) Procli Diadochi In primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ed. G. Friedlein, Leipzig 1873, dt. Übers. von L. Schönberger mit Einleitung von M. Steck, Halle 1945.

die Römer ums Leben kam[11]). ‚Störe meine Kreise nicht', dies ist der letzte Wunsch des reinen Theoretikers jenseits der brutalen Realität des Kriegs. Für die Römer allerdings beruhte der Ruhm des Archimedes darauf, daß er Kriegsmaschinen gebaut bzw. verbessert hatte, die die militärischen Aktionen in ganz unvorhergesehener Weise verzögert hatten. Aber, schreibt später Plutarch über diese Ereignisse, Archimedes habe diese Kriegsapparate nur aus Freundschaft zu König Hieron von Syrakus und auf dessen ausdrücklichen Wunsch hin gebaut; für ihn waren sie Nebenwerk einer „spielenden Geometrie". „Er wollte darüber auch nie etwas veröffentlichen, weil er Beschäftigung mit der Mechanik und überhaupt jede praxisorientierte Technik für unvornehm und banausisch hielt und seinen Ehrgeiz nur auf das richtete, wo das Schöne und Ungewöhnliche ohne Beimengung der Lebensnotdurft zu finden ist." Hier klingen dem ideologie-kritisch geschärften Ohr die gesellschaftlich bedingten Wertsetzungen deutlich heraus: Handarbeit für den Lebensunterhalt ist ‚banausisch', ‚vornehm' nur das ‚Spiel' einer leisure class. Solche Einstellung einer Sklavenhaltergesellschaft ist längst vergangen und abgetan. Vielleicht freilich läßt Plutarch, der Platoniker, die Einstellung des Archimedes starrer erscheinen, als sie in Wirklichkeit war. Archimedes hat mehr als jeder andere antike Mathematiker die Mathematik zur Physik erweitert – Schwerpunktsbestimmungen, Hebelgesetz, Hydrostatik –. Aus seinen Untersuchungen über Spiralen ging auch die Wasserschnecke hervor, die als ventillose Pumpe in Ägypten dann allgemein zur Bewässerung verwendet wurde[12]) und noch in modernen Kläranlagen im Einsatz ist. Aber schon die Weiterentwicklung der theoretischen Spirale zur praktisch verwendbaren Holzschraube ließ noch Jahrhunderte auf sich warten[13]) und kam ohne weitere Mitwirkung der Mathematiker zustande; und von der Erfindung der ersten wichtigen Energie liefernden Maschine, Wasserrad und Wassermühle[14]), haben, so weit ich sehe, weder Mathematiker noch Philosophen je Notiz genommen.

Nur in einem besonders ausgezeichneten Bereich ließ sich die reine Mathematik, die Geometrie, mit Erfolg in Naturwissenschaft umsetzen: in der Astronomie. Eudoxos von Knidos, Zeitgenosse Platons, errang den Ruhm, als erster ein System entworfen zu haben, das die scheinbar regellosen Planetenbewegungen auf ‚vollkommene', gleichförmige und konzentrische Kreisbewegungen zurückführte[15]). Als Verbesserung setzte sich dann das Epizykelsystem durch, das als Beschreibung der Himmelsbewegungen dem System des Kopernikus aequivalent ist. Die zugrundeliegende

---

[11]) Vgl. E.J. Dijksterhuis, Archimedes, Kopenhagen 1956; K. Schneider, Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker, Darmstadt 1979. Die Zitate aus Plutarch, Leben des Marcellus 14; 17.

[12]) Diodor 1,34,2; 5,37,3; Athenaios 208 F.

[13]) R. Kellermann, W. Treue, Kulturgeschichte der Schraube, München 1962²; F. Kiechle, Zur Verwendung der Schraube in der Antike, Technik-Geschichte 34, 1967, 14–22.

[14]) Vitruv 10,5,2; Antipatros von Thessalonike Anthol. Pal. 9, 418.

[15]) F. Lasserre, Die Fragmente des Eudoxos von Knidos, Berlin 1966, 198–212; E. Maula, Studies in Eudoxus' Homocentric Spheres, Societas Scientiarum Fennica 1974; O. Neugebauer, A History of Ancient Mathematical Astronomy II, New York 1975, 675–683.

Forderung, die ungeordnete Vielfalt auf gleichförmige Kreisbewegungen zurückzuführen, schreibt die Tradition Platon zu[16]); jedenfalls ist das Prinzip, daß das Einfache das Vollkommene und darum zugleich das Primäre sei, durch und durch platonisch. Das Postulat der gleichförmigen Kreisbewegungen hat die wissenschaftliche Astronomie fast 2000 Jahre lang beherrscht; die Vollkommenheit der geometrischen Figur ließ sich durch die numerischen Abweichungen, die durchaus bemerkt wurden, nicht aus dem Felde schlagen. Auch Ptolemaios, der recht eigentlich erst die Präzisionsastronomie mit trigonometrischen Werten begründete, suchte das Prinzip durch die Konstruktion seines ‚Ausgleichspunktes' zu retten, obgleich die gleichförmige Bewegung der Himmelskörper damit de facto aufgegeben war. Erst Kepler wagte den Schritt, Ellipsen als Planetenbahnen anzusetzen[17]). In der Vollkommenheit der Himmelskreise ließ sich ein populärwissenschaftliches Weltbild verankern, die Vollkommenheit der höheren Welt im Kontrast zum Wirrwarr des Unvollkommenen hienieden, unter dem wechselnden Mond. Astronomen waren zumeist Platoniker. „Wenn ich im Geist den umlaufenden Spiralen der Gestirne nachspüre, berühre ich nicht mehr die Erde mit den Füßen, sondern fühle mich unmittelbar bei Gott", heißt es in dem Epigramm des Ptolemaios[18]); ‚der gestirnte Himmel über mir', so klingt dies noch nach bei Kant. Die Schönheit der Geometrie und ein Hauch von Platonismus sind griechisches Erbe in der Astronomie, das heute freilich doch wohl von atomaren Explosionen und schwarzen Löchern verschlungen wird.

Platon selbst hat sich nicht auf eine naive, räumlich aufzufassende Zwei-Welten-Theorie festgelegt. Den kühnsten Entwurf, wie die Gesamtheit unserer Welt geometrisch gestaltet sei, hat er in seinem naturphilosophischen Dialog ‚Timaios' vorgelegt. Demnach werde die ungeformte Materie, die ‚Amme des Werdens', die praktisch mit dem Raum identisch ist, dadurch zur körperlichen Wirklichkeit gestaltet, daß sie im kleinsten Bereich zunächst durch Dreiecksflächen begrenzt wird, die sich ihrerseits wieder zu gleichseitigen Dreiecken oder Quadraten zusammensetzen, aus denen dann die regulären Körper aufgebaut werden, Tetraeder Würfel Oktaeder Ikosaeder; diese konstituieren als Korpuskeln, als teilbare Atome sozusagen, die Elemente Feuer Erde Luft und Wasser; der fünfte reguläre Körper, das Dodekaeder, anders aufgebaut, nämlich aus Fünfecken, und scheinbar überschüssig im System der Elemente, wird mit einer geheimnisvoll-unpräzisen Formulierung ‚dem All' zugewiesen[19]). Diese bizarre, unverifizierbare und willkürliche Konstruktion hat schon im Altertum viel Kopfschütteln hervorgerufen, erregt aber doch auch Bewunderung durch die spekula-

[16]) Sosigenes bei Simplikios, In Arist. De caelo p. 488, 18–24 Heiberg, vgl. J. Mittelstrass, Die Rettung der Phänomene, Berlin 1962; G.E.R. Lloyd, Saving the Appearances, Classical Quarterly 28, 1978, 202–222; A. Mourelatos, Astronomy and Kinematics in Plato's Project of Rationalist Explanation, Studies in the History of Philosophy and Science 12, 1981, 1–32.

[17]) Vgl. K. Hübner, Kritik der wissenschaftlichen Vernunft, Freiburg 1978, 101–115.

[18]) Anthol. Pal. 9, 577; F. Boll, Kleine Schriften zur Sternkunde des Altertums, Leipzig 1950, 143–155.

[19]) Vgl. D.J. Schultz, Das Problem der Materie in Platons Timaios, Bonn 1966; L. Brisson, Le même et l'autre dans la structure ontologique du Timée de Platon, Paris 1974.

tive Konsequenz, nun wirklich die mathematische Form in den einfachsten Prinzipien auch der realen Welt zu verankern, im unsichtbar Kleinen so gut wie im makrokosmischen Bereich, wo die vollkommenen Kreisbewegungen der harmonischen Weltseele gelten. Zweierlei sei hervorgehoben: zum einen hat offenbar Platons ‚Timaios' dem Lehrbuch des Euklid das Ziel gesetzt: die ‚Elemente' laufen ja aus in der Konstruktion der 5 regulären Körper, wie sie der Kugel einbeschrieben werden[20]). Zum anderen hat Werner Heisenberg immer wieder gern die gymnasiale Reminiszenz erzählt, wie er als Schüler Platons ‚Timaios' im Urtext las und an dieser Stelle, bei der Konstruktion der Materie in Form der regulären Körper, stutzte und aufhorchte – bis er dann sehr viel später in der ganz neuartigen Auffassung moderner Atomphysik von der Materie Platons Intention erfüllt fand: Materie nicht als eigentlich materielle, tote Brocken, sondern als mathematische Formung des Raumes[21]). So kann sich selbst ein moderner Physiker noch in gewissem Sinn als Platoniker empfinden. Ich glaube, auch in den Forschern, die heute den vermuteten Symmetrien der Quarks nachspüren, lebt noch etwas von dieser Motivation in der Suche nach dem Einfachen, Ersten. Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben, sagte Galilei, und viele sprachen es ihm nach. ‚Gott treibt stets Geometrie', τὸν θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν, in dieser Form wird ein analoges Prinzip Platon zugeschrieben[22]). Hier ist der ‚Gott' noch explizit, den zu nennen der Moderne sich scheut; die Mathematik aber ist, natürlich, repräsentiert durch die Geometrie.

Über das Verhältnis von Mathematik und Philosophie hat Platon sich vor allem in einem berühmten Passus seines ‚Staates' geäußert (510c–511d)[23]): Die Mathematiker, schreibt er, setzen gewisse Grundfiguren und Grundbegriffe voraus und leiten, von ihnen ausgehend, die Lösung ihrer Probleme in widerspruchsfreier Weise her (**homologuménōs** 510d2). Der axiomatisch-deduktive Aufbau der Mathematik ist damit klar bezeichnet. Platons Wort für die Grundfiguren und Grundbegriffe ist **hypothéseis**, ‚Unterstellungen', ‚Grundlagen'. Dem deduktiven Weg der Mathematik nun, dem Weg nach unten, setzt Platon die andere, philosophische Richtung des Fragens entgegen, die jene ‚Unterstellungen' ihrerseits zu Ausgangspunkten einer Untersuchung in entgegengesetzter Richtung macht, um letztlich einen ‚Anfang ohne Voraussetzung', eine **anypóthetos arché**, zu finden. Dies sei die Methode der Dialektik. Wie diese von Platon getroffene Unterscheidung weiterwirkt auf Aristoteles, der in den Analytica posteriora die Theorie der beweisenden Wissenschaft darstellt, ausgehend von unbewiesenen ersten Sätzen, und weiter über Aristoteles hinaus bis zum Anfang der euklidischen ‚Elemente', wo die fachspezifischen **Hypothéseis** nun als Postulate, **aitémata**, erscheinen, neben ‚allgemeinen Begriffen', **koinaì énnoiai**, die später Axiome genannt werden, hat Kurt von Fritz in seiner Studie über die Archai in

[20]) Hierzu E. Sachs, Die fünf Platonischen Körper, Berlin 1917.

[21]) W. Heisenberg, Das Naturbild der heutigen Physik, Hamburg 1955, 41 f.

[22]) Plut. quaest. conv. 8, 2, 718B–720C; R. Seide, Die mathematischen Stellen bei Plutarch, Diss. Regensburg 1981, 109 f.

[23]) Vgl. R. Robinson, Plato's Earlier Dialectic, London 1953, ch. X = Plato. A Collection of Critical Essays ed. G. Vlastos I, Garden City 1971, 97–131.

der griechischen Mathematik dargestellt[24]). Das Wechselgespräch zwischen Mathematik und Philosophie läßt sich hier eine Strecke weit im Detail verfolgen. Dabei erbietet sich die Philosophie als umfassende Wissenschaftslehre, die Grundlagen auch der Arithmetik und Geometrie zu sichern. Platonische Philosophie als Meta-Mathematik: Insofern die von Platon angesprochene Dialektik sich historisch zur aristotelischen Logik weiterentwickelt hat, scheint Platons Programm durchaus sinnvoll, ja in gewissem Sinn in der modernen Logik und Arithmetik z.B. mit der Zurückführung des Zahlen- auf den Klassenbegriff erfüllt.

Gerade im Rahmen des Platonismus freilich ist das Programm vom Verhältnis der Mathematik zur Philosophie, wie es Platon in dem Hypothesis-Passus entwirft, nie recht verwirklicht worden. Platons eigener, nie schriftlich fixierter Entwurf, der über dem Bereich des Mathematischen aus höchsten Prinzipien abzuleitende Ideen-Zahlen ansetzte, hat sich trotz der intensiven Bemühungen der letzten Jahrzehnte[25]) nicht eigentlich fruchtbarem Verständnis erschlossen; er hatte, nach dem Verdikt des Aristoteles, weder der Philosophie noch der Mathematik das Ihre gegeben[26]). Von der anderen Seite her zeigt sich zwar das Werk des Euklid an seinem Anfang mit dem System der Definitionen, Postulate und Axiome der platonisch-aristotelischen Schuldiskussion verpflichtet, doch ist die Zusammenstellung zumindestens teilweise so vorläufig und unvollständig, daß sie nur Platons Feststellung bestätigt, die Geometer kümmerten sich nicht allzuviel um die eigenen Voraussetzungen. Was die Philosophie bot, waren eher rhetorische Lösungen. Schon für Platon manifestiert sich in den mathematischen Einsichten in besonderem Maße der **Noûs**, die ‚Vernunft' schlechthin; sein Schüler und Nachfolger Speusippos behauptete schlicht, der Verstand (**diánoia**) liefere gerade für die Mathematik von sich aus ohne längere Untersuchung gewisse Ergebnisse, er „erfasse diese deutlicher als der Gesichtssinn das Sichtbare"[27]) – also die Feststellung direkter ‚geistiger' Evidenz als Grundlage der mathematischen Wissenschaften. Ausführlicher, doch im Prinzip nicht viel anders äußert sich Proklos in der Einleitung seines Euklid-Kommentars über die philosophischen Grundlagen der Mathematik. Ihm stehen Platon wie Aristoteles zur Verfügung; er versichert demgemäß, daß allen anderen Wissenschaften, insbesondere der Geometrie ihre **archaí** durch die erste Philosophie geliefert werden, die Wissenschaft vom ‚Seienden, insofern es Seiendes ist', daß demgemäß die Seele „vom **Noûs** und auch von sich selbst" die mathematischen Begriffe erhält[28]) – so hatte der Sklave in Platons

[24]) Die **archai** in der griechischen Mathematik, Archiv für Begriffsgeschichte 1, 1955, 13–103 = Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin 1971, 335–429.

[25]) H.J. Krämer, Arete bei Platon und Aristoteles, Sitzungsber. Heidelberg 1959, 6; K. Gaiser, Platons ungeschriebene Lehre, Stuttgart 1963; H.G. Gadamer (et al.), Idee und Zahl, Abhandl. Heidelberg 1968, 2.

[26]) Met. 13, 1090b20–91a12, vgl. J. Annas, Aristotle's Metaphysics, Books M and N, Oxford 1976, z. d. St.

[27]) Fr. 30 Lang = F 73 Tarán.

[28]) p. 9, 14–25; 15, 19–21; Becker, Grundlagen 123; 128; allgemein W. Beierwaltes, Das Problem der Erkenntnis bei Proklos, Entretiens sur l'antiquité classique 21, 1975, 153–183.

‚Menon' „aus sich selbst" die mathematische Einsicht genommen –, aber wie dies im einzelnen sich ereignet und wieso dabei eindeutige Ergebnisse gewonnen werden, wird auch nicht ansatzweise gezeigt. Platonische Begrifflichkeit kreist selbstgefällig in sich selbst.

Bekanntlich bestand der entscheidende Fortschritt zur modernen Geometrie ja auch nicht darin, die so lange versprochene absolute Begründung schließlich und endlich zu finden, sondern darin, eine der nicht ganz so evidenten Voraussetzungen, das berühmte Parallelenpostulat, in Frage zu stellen und damit nicht-euklidische Geometrien als gleichermaßen widerspruchsfreie, strenge Wissenschaften aufzubauen. Nochmals ist in diesem Zusammenhang Carl Friedrich Gauß als einer der entscheidenden Wegbereiter zu nennen. Damit aber hat sich die Platonische Ableitungs-Hierarchie ins Gegenteil verkehrt: nicht der Geist liefert vor aller Empirie das Vorwissen über die richtige Geometrie, sondern die Empirie muß entscheiden, welche Geometrie in Wirklichkeit gilt. So formulierte Carl Friedrich Gauß, im bewußten Widerspruch zu Kant, „daß wir die Geometrie nicht vollständig apriori begründen können"[29]); bei Moritz Pasch heißt es dann, die mathematischen Grundsätze seien „unmittelbar auf Beobachtung gegründet"[30]). Damit scheint der äußerste Gegenpol zum mathematischen Platonismus erreicht. Die Empirie behauptet nun auch hier das Feld. Platonismus im Sinn der Geistmetaphysik kann in der modernen Mathematik nicht mehr auf Heimatrecht pochen.

Noch weiter gehen Paul Lorenzen und Rüdiger Inhetveen in einem kürzlich vorgelegten Entwurf über Protogeometrie und sogenannte Thaletische Geometrie[31]). Wie die konstruktive Logik an Stelle der Probleme der axiomatischen Begründung einfach den Kalkül als „Herstellungsvorschrift für Figuren" gesetzt hat[32]), werden nun auch die Grundbegriffe der Geometrie bzw. zunächst der Protogeometrie als praktische Herstellungsvorschriften gefaßt; so wird die strenge Wissenschaft denn endlich statt in den höheren Gefilden geistiger Evidenz in der Praxis menschlicher Produktion verankert. Hugo Dingler hatte schon darauf hingewiesen, daß man z.B., um eine Ebene herzustellen, drei grob vorgeebnete Platten paarweise aufeinander abschleift, a auf b, b auf c, dann aber auch a auf c: das Resultat ist eine immer genauere Ebene; so arbeitet die Feinmechanik, damit ist aber auch eine theoretisch

[29]) Becker, Grundlagen 178 (Gauß an Bessel 27.1.1829).

[30]) Becker, Grundlagen 201 (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882).

[31]) P. Lorenzen, Geometrie als meßtheoretisches Apriori der Physik, Physik und Didaktik 8, 1980, 201–299. – P. Bernays, Der Platonismus in der Mathematik (1935), in: Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik, Darmstadt 1976, 62–78 hatte geurteilt, ‚Platonismus' als Annahme einer Ideenwelt, die alle Gegenstände der Mathematik enthält, sei für die Algebra unhaltbar, für die Geometrie aber angemessen (74).

[32]) P. Lorenzen, Formale Logik, Berlin 1958 (1970^4) 58; Metamathematik (Berlin 1980^2) 29, vgl. dort allgemein über ‚Konstruktivisten' und ‚Axiomatizisten' 9–13; 50–62; allgemein K. Lorenz (Hg.), Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die konstruktive Wissenschaftstheorie, Berlin 1979.

befriedigende, prototypenfreie Definition der Ebene gewonnen[33]). Als Schnitt zweier Ebenen ergibt sich dann ebenso exakt und befriedigend die Gerade; Inhetveen läßt dann weiter durch Kippen einer Ebene um eine Gerade Keile entstehen; der Ausgleich eines Keilpaares wiederum liefert den rechten Winkel. So kann dann, über die Figur eines Rechtecks mit Diagonalen und Winkelhalbierenden, die ganze Geometrie bis zum Lehrsatz des Pythagoras aufgebaut werden, ohne daß man übrigens den Kreis, der für Euklid, für die Platoniker und noch für den sterbenden Archimedes so wichtig ist, einzuführen braucht.

Die Eleganz, mit der dieser neuartige Aufbau der Geometrie die uferlose Problematik des euklidischen Axiomensystems hinter sich läßt, ist verblüffend. Konstruktionsregeln, die weiter keiner Begründung bedürfen, ersetzen die Axiome. Man sieht die Geometrie direkt erwachsen aus einem lebensweltlichen Fundament, aus der Praxis, aus der Technik. Von der ‚Reinheit' geistvermittelter Strukturen bleibt scheinbar keine Spur, es sei denn in der ‚idealen' Forderung immer weiterer Verfeinerung bei der Herstellungsvorschrift[34]).

Merkwürdigerweise haben Lorenzen und Inhetveen dieser neu begründeten Geometrie doch wieder einen griechischen Namen gegeben, ‚Thaletische Geometrie'. Dies geht davon aus, daß jene Rechtecksfigur mit Diagonalen im Zentrum steht, die auch beim sogenannten ‚Thaleskreis' ihre Rolle spielt[35]). Der Kreis allerdings bleibt ausgeschlossen. Dennoch wird suggeriert, daß diese Geometrie gegenüber Euklid eine ursprünglichere Stellung einnimmt, wie ja Thales dem Euklid um fast 300 Jahre vorausgeht. Ähnlich wie die Philosophie der Vorsokratiker uns heute oft fruchtbarer und moderner erscheint als die metaphysische Wendung, die Platon dann einschlug, steht auch hier der Vorsokratiker Thales gegen Euklid. Wenn der axiomatische Aufbau in eine platonische Sackgasse geführt hat, ist beim Älteren, Unverstellten neu anzusetzen.

Von der Überlieferung her ist freilich die Berufung auf Thales haltlos und verwirrend – aus der Notiz über den Thaleskreis wird eine Geometrie ohne Kreis konstruiert –. Trotzdem kann die moderne Sicht, die Distanzierung vom Überlieferten eben dieses in seiner nicht selbstverständlichen Eigentümlichkeit plastischer hervortreten lassen. Es muß ja in der Tat der theoretischen, axiomatisch-deduktiven Geometrie eines Euklid eine praktische, technische Geometrie vorausgegangen sein. Ihre Spuren aufzufinden, ist eine Aufgabe, die gerade den Philologen und Historiker reizt. Zwar sind keine geometrischen Fachbücher aus der Zeit vor Euklid erhalten, und in unseren literarisch ausgerichteten Texten kommt die Alltagspraxis viel zu kurz. Doch kann besonders die Wortgeschichte dem Philologen klare Aufschlüsse vermitteln: Ausgangspunkt und Wandel der Praxis klingen aus der lebendigen Sprache, ehe sie terminologisch versteinert.

---

33) H. Dingler, Das Experiment. Sein Wissen und seine Geschichte, München 1928, 59 f.; vgl. bei Becker, Grundlagen 210 f.

34) Dingler bei Becker, Grundlagen 211.

35) Als ‚Thaletische Grundfigur' herausgestellt von Becker, Math. Denken 37.

Geometrie heißt Landvermessung. Die erhaltenen griechischen und lateinischen Texte zu dieser praktischen ‚Kunst' stammen freilich erst aus der Kaiserzeit. Seit Herodot (2,109) finden wir die Behauptung, die Geometrie sei in Ägypten erfunden, wo nach der Nilflut das Land alljährlich neu zu vermessen war. Doch hat es auch in Griechenland wiederholte Anlässe zur Landvermessung gegeben. Zum einen hat man bei Koloniegründungen das neue Land in gleiche ‚Lose', **klêroi**, aufgeteilt, zum anderen gab es bei Sozialrevolutionen immer die Forderung nach Neuverteilung des Grundbesitzes, was gar nicht so selten auch ausgeführt wurde. Immer stellte sich die Aufgabe, in sehr ungleichmäßigem Gelände gleiche Flächenstücke herzustellen. Dies leistete der ‚Geometer'. Als in Aristophanes' ‚Vögeln' das Wolkenkuckucksheim gegründet wird, eilt sogleich der Mathematiker Meton herbei, um die Luft zu vermessen und den Himmelskreis zu quadrieren (995–1009). Sicher hat man in solcher Praxis längst vor Meton festgestellt, daß etwa die Fläche eines Dreiecks nicht ‚einhalb Seite × Seite' zu berechnen ist – wie dies ein ägyptisches Rechenbuch[36]) naiverweise tut –. Auch Probleme der ‚Flächenanlegung' müssen bei diesen Flurbereinigungen angefallen sein. In einem Fall, auf der Halbinsel Krim, hat man die Landvermessung einer griechischen Polis kontrollieren können; Grundeinheit ist ein Quadrat von 50 Plethren, d.h. mit einer Diagonale von 1000 Fuß[37]): Die Aufgabe des Sklaven aus Platons ‚Menon' gehört zur Standardtechnik der praktischen Geometrie.

Ein sehr solides Dokument von der Praxis griechischer Geometer hat die Zeit überdauert, der Wasserleitungstunnel von Samos. Er wurde 540/30 v.Chr. unter Polykrates durch den Architekten Eupalinos durch den Berg getrieben[38]), und zwar, wie man seit der Wiederentdeckung vor etwa 100 Jahren weiß, von zwei Seiten zugleich. Die beiden Äste stoßen fast in der Mitte mit einem Fehler von wenigen Metern zusammen. Die Vermessung war also nicht perfekt, aber umso erstaunlicher ist das Vertrauen, das Unternehmer wie Auftraggeber in diese setzten: Jenseits des Augenscheins ‚wußte' man, daß die beiden Äste sich treffen mußten, auch wenn sich dies de facto erst nach etwa 10jähriger Arbeit herausstellen konnte. Eine sehr selbstsichere Technik der Geometrie muß damals eben aufgekommen sein. Der Tunnel ist nicht auf der kürzesten Linie von der Quellfassung zur Stadt angelegt, sondern seitwärts verschoben, dort, wo der Berg am einfachsten überstiegen werden kann. Offenbar hat der Geometer hier mit einer Reihe von Peilstöcken über den Berg hinweg die gerade

[36]) A. Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Pap. Rhind), Leipzig 1877, nr. 51, p. 125–127; eine ähnlich ungenaue Formel fürs Trapez, nr. 52, p. 127–129.

[37]) Th. D. Boyd, M. H. Jameson, Urban and Rural Land Division in Ancient Greece, Hesperia 50, 1981, 327–342, hier 329–332.

[38]) Hdt. 3, 60; L&S 418; Neuuntersuchung des Tunnels: U. Jantzen, R. C. S. Felsch, H. Kienast, Archäologischer Anzeiger 1973, 401–414. – Bereits der Wasserleitungstunnel des Hiskia in Jerusalem wurde, um 700 v. Chr., nach der erhaltenen Inschrift von zwei Seiten zugleich gegraben: Ancient Near Eastern Texts ed. J. B. Pritchard, Princeton 1955², 321; Ausgrabungsbefund: H. Guthe, Zeitschrift des deutschen Palästina-Vereins 5, 1882, 91–106 m. Taf. VIII. Der Tunnel hat einen merkwürdig gekrümmten Verlauf, mindestens ein Orientierungsschacht wurde nach oben geschlagen.

Linie abgesteckt und so die genauen Relationen zwischen Eintritt, Austritt und Richtung des Tunnels ermittelt. Eine ,Reihe' von Stöcken heißt griechisch **stoîchos**, eine solche Vermessung **diastoichízesthai**. Ich vermute, daß darum auch die Werkzeuge zu diesem Verfahren, der Erstellung eines **stoîchos**, **stoicheîa** genannt wurden, eben die Peilstöcke des Geometers[39]). Das läßt sich, weil direkte Zeugnisse der Fachsprache fehlen, nicht direkt belegen. **Stoicheîa** heißen dann aber die Grundlagen der theoretischen Geometrie, lateinisch später mit **,Elementa'** wiedergegeben. Ich vermute, daß dieser Titel, den wohl schon Hippokrates von Chios in dem ersten Buch dieser Art um 430 v.Chr. verwendete, eben metaphorische Umsetzung der Praxis des Geometers ist. An Stelle seiner Stöcke nimmt er neuartige Werkzeuge als Ausgangspunkt, Sätze und ihre Ableitungen.

Nur im Vorbeigehen sei festgehalten, daß das berühmte Wort Logos, ,Rede' und ,Rechnung', in seiner speziell mathematischen Bedeutung ,Verhältnis', lateinisch *ratio,* offenbar gleichfalls aus der Praxis stammt, nämlich aus der alltäglichen Zinsrechnung[40]). Weitere Termini verweisen auf einen dritten praktischen Bereich, auf Architektur und Steinmetzhandwerk, die gerade in der klassischen griechischen Baukunst so innig verbunden sind. Ein vielberufenes Wort taucht zweimal am Anfang von Euklids Elementen auf, im 7. Axiom und im ersten Kongruenzsatz (1,4), das ,Aufeinanderlegen' von zwei Figuren, **epharmózein**. Als lateinische Übersetzung dieser ,Deckung' ist dann *congruere* eingeführt worden. Heftige Diskussionen wurden darum geführt, ob damit ein empirisches Moment in die ,reine', strenge Geometrie eingeführt sei; eher ist es nicht restlos ausgetrieben. Offenbar sucht Euklid das **epharmózein** so weit wie möglich zu verdrängen, ohne es ganz entbehren zu können[41]). Daß es in der älteren Mathematik eine größere Rolle spielte, läßt sich vermuten; daß das Wort aus der Praxis stammt, steht ganz außer Zweifel. Als augenfälligste Aufgabe des ,Aufeinanderpassens' mag man an den Aufbau einer Säule aus Säulentrommeln denken: hier war millimetergenau zu arbeiten, selbst wenn die Säulen sich verdicken und verjüngen. Natürlich wußte man, daß die Gleichheit der Radien bzw. Durchmesser das ,Passen' garantiert. Aber dies ist nur ein Spezialfall. In der ganzen klassischen Architektur, die mit genau behauenen Steinblöcken arbeitet, ist das ,Aufeinanderpassen' wichtigstes Prinzip, und die Aufgaben wurden seit dem 6. Jahrhundert

[39]) In diesem Sinn möchte ich meinen Vorschlag von 1959 (ΣΤΟΙΧΕΙΟΝ, Philologus 103, 167–197) jetzt präzisieren. Von hier aus wird ein Ausdruck wie „nehmen wir als Ausgangspunkt" (στοιχεῖον) Plat. Leg. 790c, auch das altbezeugte κατά στοιχεῖον „in Reihe" (Hippys FGrHist 554 F5 = Phainias Fr. 12 Wehrli = Plut. Def. or. 422 DE) verständlich; διαστοιχίζεσθαι Aisch. Prom. 232. Zum ganzen jetzt ausführlich W. Schwabe, ,Mischung' und ,Element' im Griechischen bis Platon, Archiv für Begriffsgeschichte, Suppl. 3, Bonn 1980, 57–251, der die geometrische Bedeutung von στοιχεῖον wegen der relativ späten direkten Bezeugung als sekundär betrachtet, wohl aber στοιχεῖον als Pflock zur Schattenmessung als alt und ursprünglich gelten läßt (101).

[40]) L&S 438–440; vgl. auch Th. Horowitz, Vom Logos zur Analogie, Zürich 1978.

[41]) Th. Heath, The Thirteen Books of Euclid's Elements I, Cambridge 1926², 224–226; von Fritz, **archai** 398–414.

virtuos gemeistert. Die wichtigste universal verwendbare Paßform ist die Quaderform, griechisch mit **tetrágonos** bezeichnet. „Viereckig, ohne Tadel hergestellt", dies ist beim Dichter Simonides gegen Ende des 6. Jahrhunderts die Metapher für den wirklich guten, den einwandfreien Mann[42]); die ‚Herstellung', **tetygménos**, ist dabei explizit in die Metapher mit hineingenommen. Aber natürlich ist der Quader als Paßform weitaus älter, er dominiert ja bereits die Pyramidenarchitektur in der Mitte des 3. Jahrtausends v. Chr. Auch die Form, die das indogermanische Wort ‚Knie', griechisch **góny**, in **trígōnon** und **tetrágōnon** annimmt sowie in dem verallgemeinerten Abstraktum **gōnía** ‚Winkel', ist wohl sprachgeschichtlich sehr alt[43]). Dabei hat dieser wichtige Begriff, wie auch das deutsche Wort, seinen konkreten Anwendungsbereich in der Architektur: ein ‚Winkel' ist, wo zwei Mauern zusammenstoßen. Nimmt man das Wort ‚anpassen', **harmózo**, selbst unter die Lupe, so entdeckt man darin das Wort **hárma**, mykenisch **hármo**, das klassisch-griechisch den Wagen bezeichnet, mykenisch aber spezieller das Rad[44]), das Speichenrad des Kriegswagens. Auch **kýklos**, Kreis, heißt von Haus aus konkret eben ‚Rad'. Hier fassen wir hinter der ‚vollkommenen' Gestalt wiederum die technische Praxis, die Herstellungsvorschrift. Das Rad war ja wohl die wichtigste technische Erfindung des Neolithicums, schwer herzustellen und darum umso wertvoller; daß man in der Mitte des 2. Jahrtausends lernte, ein Speichenrad herzustellen, war ein großer Fortschritt der Handwerkskunst; er implizierte als Herstellungsvorschrift ein wesentliches protogeometrisches Prinzip: Gleichheit der Radien im Kreis.

In andere, noch allgemeinere Bereiche führt indessen ein anderer wichtiger Begriff, das Wort für den ‚rechten Winkel', **orthè gonía**. Dies heißt ja eigentlich ‚der aufrechte Winkel'. Dies erinnert zunächst wieder an die Architektur, an die grundlegende Aufgabe, eine Mauer, eine Säule so zu bauen, daß sie nicht umfällt. Dahinter aber steht im Wort **orthós**, das zum Verbum **or-nysthai** gehört, das Sich-Aufrichten des Menschen, jene spezielle Leistung, die jedes Kind mit viel Umfallen erlernt und die bei schwerer Beeinträchtigung und Tod am auffälligsten endet. Zum aufrecht gehenden Menschen gehört sein Aktionsfeld, das ihm ‚zu Füßen' liegt, **pedíon**[45]), die ‚Fläche'; dort bewegt er sich, wenn möglich, ‚gerade' auf sein Ziel zu, **euthýs** – daher die Bezeichnung der ‚Geraden', **eutheîa**. Insofern sind nach dem Zeugnis der griechischen Sprache die Grundbegriffe der Protogeometrie, Ebene, Gerade, rechter Winkel, gerade nicht von technischen Herstellungsvorschriften bestimmt, sondern von der Orientierung im Lebensraum. Die anthropomorphe Gliederung des Raums nach den drei Achsen vorn–hinten, rechts–links, oben–unten ist auch aus dem geometrischen dreidimensionalen Raum fast nicht wegzudenken. Die Aufteilung des Raums in vier rechtwinklige Sektoren, vier Himmelsrichtungen spielt im primitiven

---

[42]) Fr. 542, 2 f. Page, Poetae Melici Graeci.
[43]) G. Darms, Schwäher und Schwager, Hahn und Huhn, München 1978, 326 f., der aber nur γωνία, nicht τρίγωνον/τετράγωνον berücksichtigt.
[44]) P. Chantraine, Dictionnaire éthymologique de la langue grecque I, Paris 1965, 111.
[45]) Chantraine 867.

Weltbild als grundlegende Orientierung eine ziemlich universale Rolle[46]). Daß man dann das ‚Rad' in der Welt wiederfand, Sonnenrad, Sonnenkreis, ‚Erdkreis', war eine frühe, eindrucksvolle **‚Theoría'**; so erhielt die Produktion doch wieder einen kosmischen Prototyp.

Die lebensweltlichen Grundlagen der Geometrie sind also, wie kaum anders zu erwarten, vielgestaltig und letztlich universal-anthropomorph. Ein besonderer Rang der griechischen praktischen Geometrie kündigt sich seit dem 6. Jahrhundert sowohl in der Präzision der klassischen Architektur wie in der kühnen Planung des Eupalinos-Tunnels an. Trotzdem ist der Schritt zur ‚reinen', strengen, beweisenden Geometrie, von den praktischen zu den theoretischen **stoicheîa** offenbar nicht aus den Forderungen der Technik heraus erfolgt; jedenfalls ist nicht einzusehen, welche praktischen Erfordernisse bestanden hätten, die nicht bereits in der Praxis optimal gelöst waren. Der Übergang ist auch nicht das Verdienst Platons, so beredt er auch für die rein theoretische Mathematik eingetreten ist, Mathematik als Bildung der Seele, die ‚nach oben', vom Materiellen zum Geistigen hin zu führen habe. Platon gab, wie schon erwähnt, den mathematischen Studien Auftrieb, und die Bedeutungsverengung im Begriff der **‚Mathémata'**, die ja eigentlich nur ‚Lehrgegenstände' überhaupt bezeichnen, aufs ‚Mathematische' hat sich endgültig in Platons Schule durchgesetzt[47]); aber die überempirische ‚Reinheit' und Präzision der Geometrie und ihr deduktiver Aufbau sind von Platon bereits als selbstverständlich vorausgesetzt. Auch konnte Platons Kritik die Sprache der Geometer nicht mehr reformieren: sie sprechen vor wie nach Platon mit Selbstverständlichkeit vom eigenen Tun, vom ‚Konstruieren'[48]).

Die Wendung zur strengen Theorie dürfte etwa damals eingetreten sein, als Hippokrates von Chios jene ersten **Stoicheia** schrieb und als Probleme wie die Kreisquadratur und die Würfelverdoppelung – d.h. $\sqrt[3]{2}$ – in ihrer Besonderheit, getrennt von planimetrisch lösbaren Aufgaben, erkannt wurden, d.h. um 430 v.Chr. Es spricht m.E. nicht viel dafür, einige Bestandteile des Platonismus als hypothetische pythagoräische Philosophie in die Zeit um 500 zurückzuprojizieren und daraus die griechische Geometrie herzuleiten. Entscheidend war, daß die zunächst praktische Geometrie erfaßt wurde von der allgemeinen geistigen Strömung, die im 5. Jahrhundert das Denken in Bewegung brachte und allenthalben über das Hergebrachte, über Konvention und praktische Notwendigkeit hinausschießen ließ. Wir sprechen von der Philosophie der Eleaten[49]) und der Bewegung der Sophisten. In gewissem Sinn bereits einen Höhepunkt bilden, wohl noch vor der Mitte des Jahrhunderts, die berühmten Paradoxe des Eleaten Zenon, um die auch heute noch diskutiert wird: kann Achilleus die Schildkröte einholen, wenn diese doch, obschon so viel langsamer, jedesmal, wenn der fußschnelle Achill ihre Position erreicht hat, doch wieder ein Stückchen weiter-

---

[46]) L&S 471.
[47]) L&S 422.
[48]) Plat. Resp. 527ab; Platons Nachfolger Speusipp will in der Geometrie nur Theoreme, keine Konstruktionen (προβλήματα) gelten lassen, Fr. 46 Lang = F 72 Tarán.
[49]) L&S 424–426; A. Szabo, Anfänge der griechischen Mathematik, Wien 1969, 243–361.

gekommen ist? Hier sieht die Logik ein Problem, das von der anschaulichen Praxis her durchaus nicht gegeben ist, und sie will sich von dieser nicht widerlegen lassen. Die Freude an Beweisen und Gegenbeweisen, am Widerlegen und Hereinlegen hat in dieser und den nächsten Generationen einen ungeahnten Aufschwung genommen, hat auch den Typus des berufsmäßig Weisen, des ‚Sophisten', später des Philosophen hervorgebracht. Es mußte sich aber doch bei diesen mit Leidenschaft betriebenen Spielen herausstellen, daß es einen Bereich gab, wo das Spiel des Widerlegens nicht beliebig und unvorhersehbar zu betreiben war, wo es eindeutige Ergebnisse und einsinniges Fortschreiten im Beweisen gab, eben die Mathematik, die Geometrie. So macht die Tradition den Mathematiker Theodoros zum Schüler des Sophisten Protagoras, den Schüler des Theodoros, Theaitetos, wiederum zum Bekannten Platons. Paul Lorenzen versucht, die Logik auf ein dialogisches Spiel zurückzuführen[50]). Die ‚reine' Geometrie der Griechen ist, wie auch die historischen Anfänge der Logik, von einer solchen Atmosphäre der Diskussions-Spiele her bestimmt.

Dabei ist aber von Zenon her, hinter dem Parmenides steht, ein besonderes Element wohl von Anfang an mit im Spiel: Für Parmenides und im Grund für alle griechischen Denker geht es um das ‚Sein'. Die Vieldeutigkeit des griechischen **ésti**, ‚ist', hat gerade in jüngster Zeit zu vielen lebhaften und tiefschürfenden Diskussionen Anlaß gegeben: bedeutet dieses IST nun eher Gelten, Wahr-Sein, Eigentlich-Sein oder doch ein Existierendes?[51]) Sicher und bezeichnend ist, daß Gelten, Wahr-Sein, ohne den Begriff eines Seienden den Griechen undenkbar erschien: Wahrheit ist Wahrheit des Seienden, **alétheia toû óntos**. Wenn also die Geometrie gilt, und zwar mit ihren absoluten Exaktheitsforderungen, wonach z.B. eine Gerade einen Kreis wirklich nur in einem einzigen ausdehnungslosen Punkt berührt – dieses Problem wurde damals erörtert[52]) –, dann muß es ein ‚Seiendes' geben, für das diese Aussage zutrifft. So lieferte die Verkettung von ‚Sein' und ‚Wahrheit' in der griechischen Sprache einen Ansatzpunkt zum mathematischen ‚Platonismus' bereits vor Platon; so schien dann die platonische Ontologie die einzig einleuchtende Lösung zu sein. „Geometrie ist die Erkenntnis des immer Seienden", formuliert Platon knapp und pointiert im ‚Staat' (527b); und kein Mathematiker sah Anlaß, dem zu widersprechen.

Im Gegenteil. Lassen wir noch einmal Archimedes zu Wort kommen; Archimedes war an sich weit weniger als sein weniger genialer Kollege Eratosthenes auf platonische Philosophie eingeschworen. Eine seiner großen Entdeckungen war die Formel für Volumen und Oberfläche der Kugel, jene Formeln also, die in der Form $\frac{4}{3}r^3\pi$ bzw. $4r^2\pi$ noch heute jeder Schüler lernt. Die Schrift ‚Über Kugel und Zylinder', in der Archimedes dieses sein Ergebnis vorstellt, ist erhalten. Er schreibt in der Vorrede mit berechtigtem Stolz: „Diese Tatbestände waren von Natur bei den genannten

---

[50]) Lorenzen, Metamathematik 21–29; K. Lorenz, Arithmetik und Logik als Spiele, Diss. Kiel 1961.

[51]) A.P.D. Mourelatos, The Route of Parmenides, New Haven 1970, 47–73; Ch.H. Kahn, The Word ‚Be' in Ancient Greek, Dordrecht 1973.

[52]) Protagoras 80 B 7 Diels-Kranz; L&S 421.

Figuren (Kugel und Zylinder) schon immer vorhanden, sie waren aber den Geometern vor uns unbekannt geblieben: keiner war auf den Gedanken gekommen, daß es ein (einfaches) Verhältnis zwischen diesen Figuren (d.h. Oberfläche bzw. Volumen von Zylinder und Kugel) gibt." Archimedes stellt seine Entdeckung neben die des Eudoxos, der 150 Jahre früher Pyramiden- und Kegelvolumen bestimmt hatte, und schreibt: „Denn auch dieses war von Natur bei diesen Figuren immer schon vorhanden, aber obgleich es viele beachtliche Geometer vor Eudoxos gab, geschah es, daß alle dies übersahen und keiner darauf kam"[53]). Die geometrischen Tatbestände also sind „immer schon vorhanden", und zwar „von Natur aus", τῇ φύσει προυπάρχει. Es ist Gott, der Geometrie treibt, hatte Platon gesagt. Der Forscher weiß sich als Entdecker in einem von jeher fest strukturierten, wohl geordneten geistigen Bereich. Dies gilt für den Sklaven in Platons ‚Menon' wie für den genialsten Mathematiker des Altertums. Sein **Heúreka**, die Beglückung der Entdeckung ist gleichartig, ob es sich um Geometrie oder Hydrostatik handelt.

Diese Haltung des staunenden Entdeckens hat auch die griechische Arithmetik bestimmt, so weit, daß es uns wunderlich vorkommt. Man sucht nach den ‚vollkommenen Zahlen' und nach den ‚ersten Zahlen', den Primzahlen – mit ihnen blieb der Name des Eratosthenes verbunden –. Für die Effektivität und Allgemeinheit der Mathematik ist dies eigentlich belanglos, fast eine Art Kuriositätenjagd, aber man steht überrascht vor diesen Bildungen einer höheren ‚Natur'. Von den ‚natürlichen Zahlen' spricht man auch heute noch allgemein; inwiefern sind sie ‚natürlich'?

Der Kontrast zu einer modernen Auffassung, wonach die Logik wie die Geometrie aus nicht weiter zu begründenden ‚Vorschriften zur Herstellung von Figuren' herzuleiten sind, ist markant. Dies soll nicht nostalgisch klingen. Der Fortschritt an Klarheit und Präzision ist unbestreitbar. Es wäre ein unsinniges Unterfangen, die Ontologie in die Logik und Mathematik zurückführen zu wollen. Wohl aber läßt sich feststellen und darüber nachdenklich werden, daß selbst die Grundlagen der Mathematik den jeweiligen Geist der Zeiten so exakt widerspiegeln. Vorschriften zur Herstellung statt Hinnahme dessen, was ‚von Natur schon immer vorhanden war' – auch die Sozialwissenschaften haben uns in den letzten Jahrzehnten strikt verboten, uns auf die ‚Natur' des Menschen, die natürliche Gesellschaft, natürliche Geschlechterrollen zu berufen als das, was immer schon vorhanden war. Wie veränderlich die Natur selbst ist, führt uns im großen die Technik in immer erschreckenderem Maß vor Augen, und wie man sie auch im kleinen manipulieren kann, ist nicht weniger bekannt. Wie anders die alte Logik, die am System der für unveränderlich gehaltenen Gattungen der Lebewesen orientiert war und in dem einsichtsvoll-makabren Beispielsatz für den Modus barbara sich erfüllte: Sokrates ist sterblich. Um zu wiederholen: Nostalgie wird uns nicht weiterbringen. Aber zweierlei ist zu bemerken. Zum einen: Wenn die Krise der ‚Natur' sich immer stärker bemerkbar macht und zur Lebensfrage zu werden droht, so weist das unter anderem auch darauf hin, daß die immer präziseren, linear fortschrei-

[53]) De sphaera et cylindro, Praefatio; Archimède ed. Ch. Mugler I, Paris 1970, p. 7; 9.

tenden, widerspruchsfreien Herstellungsvorschriften nicht das Letzte und Wesentliche sind. Wo aber Umdenken, neues Denken gefordert wird, da stellen sich bezeichnenderweise wieder geometrische Metaphern ein, ‚Regelkreis', ‚Vernetzung'. Es geht ja doch darum, im komplexen Raum dieser unserer Welt zurechtzukommen und dabei Vorgegebenes erst einmal zu erfassen, ehe es der eigenen Produktion zu weichen hat. Auch die Weisheit der Tradition, der biologischen wie der kulturellen, hat dabei auf Aufmerksamkeit erhöhten Anspruch.

Zum anderen: Was mit dem Platonismus der reinen Wissenschaft verloren ging, ist das sichere Selbstverständnis des ‚reinen' Wissenschaftlers. Dort war die Selbsttätigkeit des reinen Geistes höchster objektiver Wert; jetzt sieht er sich dem Vorwurf der Selbstbefriedigung ausgesetzt, es wird bezweifelt, ob es überhaupt ideologiefreies, interessenfreies Wissen geben könne. Der Weg zurück zum Platonismus ist auch hier nicht einfach; dieser war zudem stets mit asketischen Zügen verbunden, die einer Wohlstandsgesellschaft seltsam zu Gesichte stehen. Trotzdem meine ich, daß in der Idee der reinen, der Sache verpflichteten Wissenschaft etwas liegt, das unverzichtbar ist, wenn es überhaupt Wissenschaft geben soll, sei es historische und philologische, sei es mathematische und physikalische Grundlagenforschung. Wissenschaft, auch Wissenschaft von der Natur, ist insofern durchaus Geisteswissenschaft: Klarheit des Geistes, Erkenntnis ist ein Wert, der zur Würde des Menschen gehört, weil er allein über die Mechanismen des getriebenen Treibenden hinausführt. In diesem Sinne sehe ich die Gemeinsamkeit von historisch-philologischen Studien und Mathematik, von Altphilologie und dem genius loci eines Carl Friedrich Gauß.